Отчёта по лабораторной работе №8

дисциплина: Математическое моделирование

Шапошникова Айталина Степановна НПИбд-02-18

Содержание

# Цель работы

Изучить модель конкуренции двух фирм и построить графики.

# Задание

**Модель конкуренции двух фирм**

Вариант 7

**Случай 1.** Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом). Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

где

Также введена нормировка .

**Случай 2.** Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

**Замечание:** Значения указаны в тысячах единиц, а значения указаны в млн единиц.

**Обозначения:**

– число потребителей производимого продукта;

– длительность производственного цикла;

– рыночная цена товара;

– себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции;

– максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени;

– безразмерное время.

1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1.
2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2.
3. Найдите стационарное состояние системы для первого случая.

# Выполнение лабораторной работы

**Постановка задачи**

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$ \tag{1} Q = q - k \frac{P}{S} = q(1 - \frac{p}{p\_{cr}}), $$

где – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при (критическая стоимость продукта)потребители отказываются от приобретения товара. Величина . Параметр – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть при ) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$ \tag{2} \frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{M \delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M \delta}{\tau} + NQ(1 - \frac{p}{p\_{cr}})p - \kappa$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде

$$ \tag{3} \frac{\partial p}{\partial t} = \gamma (-\frac{M \delta}{\tau \tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p\_{cr}}) $$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть предложению), а второй член – спросу.

Параметр зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла . При заданном уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$ \tag{4} -\frac{M \delta}{\tau \tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p\_{cr}}) = 0 $$

Из (4) следует, что равновесное значение цены p равно

$$ \tag{5} p = p\_{cr}(1 - \frac{M \delta}{\tau \tilde{p} Nq}) $$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$ \tag{6} \frac{\partial M}{\partial t} = M \frac{\delta}{\tau}(\frac{p\_{cr}}{\tilde{p}} - 1) - M^2 (\frac{\delta}{\tau \delta{p}})^2 \frac{p\_{cr}}{Nq}
- \kappa $$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию = 0

$$ \tag{7} \tilde{M}\_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

где

$$ \tag{8} a = Nq(1 - \frac{\tilde{p}}{p\_{cr}}) \tilde{p} \frac{\tau}{\delta}, b = \kappa Nq \frac{(\tau \tilde{p})^2}{p\_{cr} \delta^2} $$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае ) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, ) и играют роль только в случае, когда оборотные средства малы. При стационарные значения M равны

$$ \tag{9} \tilde{M}\_+ = Nq \frac{\tau}{\delta}(1 - \frac{\tilde{p}}{p\_{cr}}) \tilde{p}, \tilde{M}\_- = \kappa \tilde{p} \frac{\tau}{\delta(p\_{cr}
- \tilde{p})}$$

Первое состояние устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние неустойчиво, так что при оборотные средства падают (), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр всюду входит в сочетании с . Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: = 1, а параметр будем считать временем цикла с учётом сказанного.

**Случай 1.** Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы.

В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей какимлибо иным способом).

Уравнения динамики оборотных средств запишем по аналогии с (2) в виде

$$ \tag{10} \begin{cases} \frac{\partial M\_1}{\partial t} = - \frac{M\_1}{\tau\_1} + N\_1q(1 - \frac{p}{p\_{cr}})p - \kappa\_1 \\ \frac{\partial M\_2}{\partial t}
= - \frac{M\_2}{\tau\_2} + N\_2q(1 - \frac{p}{p\_{cr}})p - \kappa\_2 \end{cases} $$

где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме соответственно. Величины и – числа потребителей, приобревших товар первой и второй фирмы.

Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене . Тогда

$$ \tag{11} \begin{cases} \frac{M\_1}{\tau\_1 \tilde{p}\_1} = - N\_1q(1 - \frac{p}{p\_{cr}}) \\ \frac{M\_2}{\tau\_2 \tilde{p}\_2} = - N\_2q(1 - \frac{p}{p\_{cr}})
\end{cases} $$

где и – себестоимости товаров в первой и второй фирме.

С учетом (10) представим (11) в виде

$$ \tag{12} \begin{cases} \frac{\partial M\_1}{\partial t} = - \frac{M\_1}{\tau\_1}(1 - \frac{p}{\tilde{p}\_1}) - \kappa\_1 \\ \frac{\partial M\_2}{\partial t}
= - \frac{M\_2}{\tau\_2}(1 - \frac{p}{\tilde{p}\_2}) - \kappa\_2 \end{cases} $$

Уравнение для цены по аналогии с (3)

$$ \tag{13} \frac{\partial p}{\partial t} = - \gamma (\frac{M\_1}{\tau\_1 \tilde{p}\_1} + \frac{M\_2}{\tau\_2 \tilde{p}\_2} - Nq (1 - \frac{p}{p\_{cr}}) $$

Считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим:

$$ \tag{14} p = p\_{cr} (1 - \frac{1}{Nq} (\frac{M\_1}{\tau\_1 \tilde{p}\_1} + \frac{M\_2}{\tau\_2 \tilde{p}\_2})) $$

Подставив (14) в (12) имеем:

$$ \tag{15} \begin{cases} \frac{\partial M\_1}{\partial t} = c\_1 M\_1 - b M\_1 M\_2 - a\_1 M\_1^2 - \kappa\_1 \\ \frac{\partial M\_2}{\partial t} = c\_2 M\_2
- b M\_1 M\_2 - a\_2 M\_2^2 - \kappa\_2 \end{cases} $$

где

$$ \tag{16} a\_1 = \frac{p\_{cr}}{\tau\_1^2 \tilde{p}\_1^2 Nq}, a\_2 = \frac{p\_{cr}}{\tau\_2^2 \tilde{p}\_2^2 Nq}, b = \frac{p\_{cr}}{\tau\_1^2 \tilde{p}\_1^2
\tau\_2^2 \tilde{p}\_2^2 Nq}, c\_1 = \frac{p\_{cr} - \tilde{p}\_1}{\tau\_1^2 \tilde{p}\_1^2}, c\_2 = \frac{p\_{cr} - \tilde{p}\_2}{\tau\_2^2 \tilde{p}\_2^2} $$

Исследуем систему (15) в случае, когда постоянные издержки () пренебрежимо малы. И введем нормировку . Получим следующую систему:

$$ \tag{17} \begin{cases} \frac{\partial M\_1}{\partial \theta} = M\_1 - \frac{b}{c\_1} M\_1 M\_2 - \frac{a\_1}{c\_1} M\_1^2 \\ \frac{\partial M\_2}{\partial \theta}
= \frac{c\_2}{c\_1} M\_2 -\frac{b}{c\_1} M\_1 M\_2 - \frac{a\_2}{c\_1} M\_2^2 \end{cases} $$

Чтобы решить систему (17) необходимо знать начальные условия. Зададим начальные значения и известные параметры:

**Случай 2.** Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед будет отличаться.

$$ \tag{18} \begin{cases} \frac{\partial M\_1}{\partial \theta} = M\_1 - (\frac{b}{c\_1} + 0.0016) M\_1 M\_2 - \frac{a\_1}{c\_1} M\_1^2 \\ \frac{\partial M\_2}{\partial \theta}
= \frac{c\_2}{c\_1} M\_2 -\frac{b}{c\_1} M\_1 M\_2 - \frac{a\_2}{c\_1} M\_2^2 \end{cases} $$

Начальные условия и известные параметры остаются прежними.

**Построение графиков**

Написали прогрмму на Python и получили два графика:

#Программа

import math

import numpy as np

from scipy.integrate import odeint

import matplotlib.pyplot as plt

M10 = 2.4

M20 = 1.7

x0=[M10, M20] #начальное значение объема оборотных средств x1 и х2

p\_cr = 19 #критическая стоимость продукта

tau1 = 15 #длительность производственного цикла фирмы 1

p1 = 12 #себестоимость продукта у фирмы 1

tau2 = 18 #длительность производственного цикла фирмы 2

p2 = 10 #себестоимость продукта у фирмы 2

N = 22 #число потребителей производимого продукта

q = 1 #максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

#Время

t0 = 0

tmax = 30

dt = 0.01

t = np.arange(t0, tmax, dt)

a1 = p\_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N\*q)

a2 = p\_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N\*q)

b = p\_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N\*q)

c1 = (p\_cr-p1)/(tau1\*p1)

c2 = (p\_cr-p2)/(tau2\*p2)

#вычисление функции для первого случая

def syst1(x, t):

dx\_1 = (c1/c1)\*x[0] - (a1/c1)\*x[0]\*x[0] - (b/c1)\*x[0]\*x[1]  
  
dx\_2 = (c2/c1)\*x[1] - (a2/c1)\*x[1]\*x[1] - (b/c1)\*x[0]\*x[1]  
  
return dx\_1, dx\_2

#вычисление функции для второго случая

def syst2(x, t):

dx\_1 = x[0] - (b/c1 + 0.0016)\*x[0]\*x[1] - (a1/c1)\*x[0]\*x[0]  
  
dx\_2 = (c2/c1)\*x[1] - (b/c1)\*x[0]\*x[1] - (a2/c1)\*x[1]\*x[1]  
  
return dx\_1, dx\_2

#решение уравнений

y1 = odeint(syst1, x0, t)

y2 = odeint(syst2, x0, t)

#подсчет стационарного состояния

M1 = (a2*c1-b*c2)/(a1*a2-b*b)

M2 = (a1*c2-b*c1)/(a1*a2-b*b)

print(M1, “;”, M2)

#построение динамики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 для первого случая

plt.plot(t, y1[:,0], label=‘Фирма 1’)

plt.plot(t, y1[:,1], label=‘Фирма 2’)

plt.hlines(M1, t0, tmax, colors=“darkgrey”, linestyles=‘dashed’, label=‘M1’)

plt.hlines(M2, t0, tmax, colors=“dimgrey”, linestyles=‘dashed’, label=‘M2’)

plt.legend(loc=4)

plt.grid()

#построение динамики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 для второго случая

plt.plot(t, y2[:,0], label=‘Фирма 1’)

plt.plot(t, y2[:,1], label=‘Фирма 2’)

plt.legend()

plt.grid()

**Графики и значения**

Получили значение стационарного состояния для первого случая:

Получили график динамики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 для первого случая (см. рис. 1):

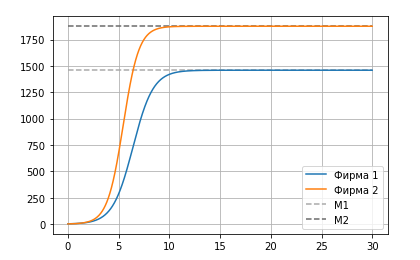


Figure 1: График для первого случая

И график динамики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 для второго случая (см. рис. 2):

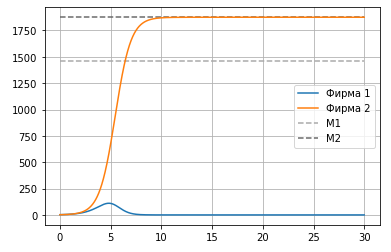


Figure 2: График для второго случая

# Выводы

После выполнения Лабораторной работы №8 мы изучили модель конкуренции двух фирм и построили графики.